Paket 2

BILANGAN BULAT DAN OPERASINYA

Pendahuluan

Pada Paket 2 ini, topik yang dibahas adalah bilangan bulat dan operasinya. Pembahasan meliputi operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat yang divisualisasikan, operasi perkalian dan pembagian bilangan, serta sifat-sifat operasi pada bilangan bulat.

Pada perkuliahan ini, mahasiswa-mahasiswi diminta menyelesaikan Lembar Kegiatan (LK) 2.1.A dengan berkelompok, kemudian perwakilan kelompok mempresentasikan hasil diskusinya dan kelompok lain menanggapi. Setelah dosen memberi penguatan tentang sistem bilangan Romawi, mahasiswa-mahasiswi diminta mendiskusikan Lembar Kegiatan (LK) 2.1.B secara berkelompok, dilanjutkan dengan menyelesaikan soal-soal latihan. Pada akhir pembahasan disertakan alat evaluasi untuk mengukur ketercapaian kompetensi.

Mahasiswa-mahasiswi dituntut untuk dapat memahami materi pada paket 2 ini karena materi yang dibahas pada paket ini memberikan dasar untuk memahami materi selanjutnya yaitu materi bilangan real dan operasi bilangannya yang akan disajikan pada paket berikutnya.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa-mahasiswi memahami bilangan bulat, operasi bilangan bulat, dan sifat-sifat operasi pada bilangan bulat beserta aplikasinya untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan dapat:

1. memvisualisasikan penjumlahan bilangan bulat pada garis bilangan,
2. membuktikan sifat tertutup penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat,
3. membuktikan sifat komutatif penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat,
4. menunjukkan unsur identitas penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat, dan
5. menunjukkan invers penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat.

Waktu

3 x 50 menit

Materi Pokok

- Penjumlahan dan Pengurangan bilangan bulat
- Perkalian dan pembagian bilangan bulat
- Sifat operasi hitung bilangan bulat

Kelengkapan Bahan Perkuliahan

1. Lembar Kegiatan 2.1.A, 2.1.B dan 2.1.C
2. Lembar Uraian Materi 2.2
3. Lembar *Powerpoint* 2.3
4. Lembar Penilaian 2.4
5. Bahan dan Alat: LCD dan komputer (disiapkan oleh dosen sendiri)

Langkah-langkah Perkuliahan

Waktu	Langkah Perkuliahan	Metode	Bahan
1	2	3	4
15'	**Kegiatan Awal**		
9'	1. Apersepsi tentang penggunaan bilangan bulat dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya dengan cara memberikan gambaran masalah dalam kehidupan sehari-sehari berkaitan dengan bilangan bulat, "Seorang Ibu ingin membuat es, kemudian dia memasukan beberapa kantong pelastik berisi air. Agar air dalam kantong tersebut cepat menjadi es Ibu menset kulkas pada suhu -10^0 ". Selanjutnya diajukan beberapa pertanyaan: o Apa makna dari minus 10^0 C (-10^0)? o Manakah yang lebih cepat dingin, apabila Ibu menset kulkas pada suhu -2^0 C atau -10^0 C?	Tanya Jawab	*Slide Powerpoint* 2.3
3'	2. Memotivasi mahasiswa-mahasiswi dengan memberikan wawasan terhadap pentingnya pemahaman terhadap materi bilangan bulat. Salah satunya adalah dengan menunjukkan penggunaan bilangan bulat pada kasus "suhu -10^0" dan operasi hitung bilangan yang apabila semestanya masih bilangan cacah tidak ada penyelesaiannya. Contoh masalahnya adalah seperti berikut, "3 - 5 = ... ".	Ceramah	
3'	3. Menjelaskan tujuan perkulian berkaitan dengan sistem bilangan bulat, operasi pada bilangan bulat dan sifat-sifat operasi pada bilangan bulat dengan menggunakan media *Powerpoint* 2.3.	Ceramah	*Slide Powerpoint* 2.3

1	2	3	4
125'	**Kegiatan Inti**		
15'	1. Mahasiswa-mahasiswi dibagi menjadi 5 kelompok kecil. Tiap kelompok memeragakan bilangan bulat dan penjumlahan bilangan pada alat peraga "mistar hitung". Kemudian setiap kelompok memindahkan proses penjumlahan bilangan bulat pada mistar hitung ke dalam bentuk gambar garis bilangan. o Penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif, misalnya 4 + 5. o Penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif, misalnya 8 + (-3). o Penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif, misalnya (-6) + 7. o Penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif, misalnya (-5) + (-7).	Ekplorasi dan diskusi	Kertas plano, spidol, mistar hitung, penggaris dan LK 2.1.A
25'	2. Setiap kelompok menuliskan hasil diskusi pada kertas plano, selanjutnya diberi kesempatan untuk mempresentasikan hasil diskusinya.	Tanya Jawab	
5'	3. Dosen memberikan penguatan dengan menggunakan *Slide Powerpoint* 2.3 tentang "penjumlahan bilangan bulat" dan menjelaskan pengurangan bilangan bulat.	Ceramah	*Slide Powerpoint* 2.3
5'	4. Selanjutnya setiap kelompok mendiskusikan "bagaimana makna perkalian bilangan bulat," berikut. o Perkalian bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif, misalnya 5 x 2. o Perkalian bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif, misalnya 5 x (-3).	Diskusi	Uraian Materi 2.2 dan LK.2.1.B

1	2	3	4
	o Perkalian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif, misalnya (-5) x 3. o Perkalian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif, misalnya (-5) x (-3).		
10’	5. Setiap kelompok menuliskan hasil diskusinya pada kertas plano, selanjutnya ditempel di dinding.	Pameran	Kertas plano dan spidol
10’	6. Setiap kelompok berkeliling mengunjungi hasil diskusi yang ditempelkan di dinding (boleh membubuhkan komentar di kertas plano yang ditempelkan).	Mengunjungi anjungan pameran	Spidol
5’	7. Dosen memberikan penguatan dengan menggunakan media *Powerpoint* 2.3 tentang “perkalian bilangan bulat” dan menjelaskan pembagian bilangan bulat.	Ceramah	*Slide Powerpoint* 2.3
10’	8. Secara berkelompok mendapat tugas membaca (*reading guide)* tentang pembuktian sifat operasi hitung bilangan bulat. o Kelompok I mendiskusikan sifat tertutup penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bilangan bulat. o Kelompok II mendiskusikan sifat komutatif penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan bulat. o Kelompok III mendiskusikan unsur identitas penjumlahan dan unsur identitas perkalian bilangan bulat. o Kelompok IV mendiskusikan invers penjumlahan dan invers perkalian bilangan bulat. o Kelompok V mendiskusikan sifat distributif perkalian	Diskusi	Uraian Materi 2.2 dan LK 2.1.C

1	2	3	4
	terhadap penjumlahan bilangan bulat.		
25'	9. Setiap kelompok menuliskan hasil diskusinya pada kertas plano, selanjutnya diberi kesempatan untuk mempresentasikan hasil diskusinya.	Presentasi dan Tanya Jawab	Kertas plano dan spidol
5'	10. Dosen memberikan penguatan dengan menggunakan media *Slide Powerpoint* 2.3 tentang "sifat operasi hitung bilangan bulat."	Ceramah	*Slide Powerpoint* 2.3
10	11. Dosen memberikan quis untuk dikerjakan secara individu.	Kerja Individu	Lembar Penilaian 2.4
10' 5'	**Kegiatan Akhir** Mahasiswa-mahasiswi melakukan refleksi terhadap proses dan materi perkuliahan yang telah dilakukan.	Tanya Jawab	
5' 5'	**Tindak Lanjut** Mahasiswa-mahasiswi diminta untuk mengerjakan soal latihan pada uraian materi 2.3.	Ceramah	

Lembar Kegiatan 2.1.A

PENJUMLAHAN BILANGAN BULAT

Tujuan

Pada akhir kegiatan ini mahasiswa-mahasiswi diharapkan dapat:

1. memperagakan penjumlahan bilangan bulat dengan menggunakan mistar hitung
2. memvisualisasikan penjumlahan bilangan bulat dengan garis bilangan

Langkah kegiatan

1. Siapkan alat peraga “mistar hitung”!
2. Tuliskan prosedur cara memperagakan penjumlahan bilangan bulat dengan mistar hitung, dan gambarlah pada garis bilangan penjumlahan bilangan bulat berikut!
   a. Penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif, misalnya 4 + 5.
   b. Penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif, misalnya 8 + (-3).
   c. Penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif, misalnya (-6) + 7.
   d. Penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif, misalnya (-5) + (-7).

Catatan Diskusi

.....

.....

.....

.....

Lembar Kegiatan 2.1.B

PERKALIAN BILANGAN BULAT

Tujuan

Pada akhir kegiatan ini mahasiswa-mahasiswi diharapkan dapat:

1. menjelaskan perkalian bilangan bulat dengan garis bilangan, dan
2. menjelaskan perkalian bilangan ulat dengan menggunakan skema.

Langkah Kegiatan

1. Berdiskusilah dengan anggota kelompok untuk menjawab pertanyaan berikut!
2. Tuliskan prosedur bagaimana cara anda menjelaskan perkalian bilangan bulat berikut dengan garis bilangan atau skema.
   a. Perkalian bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif, misalnya 5 x 2.
   b. Perkalian bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif, misalnya 5 x (-3).
   c. Perkalian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif, misalnya (-5) x 3.
   d. Perkalian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif, misalnya (-5) x (-3).

Catatan Diskusi

.....

.....

.....

.....

Lembar Kegiatan 2.1.C

SIFAT OPERASI HITUNG PADA BILANGAN BULAT

Tujuan

Pada akhir kegiatan ini mahasiswa-mahasiswi diharapkan dapat:

1. menjelaskan sifat tertutup penjumlahan dan perkalian bilangan bulat,
2. menjelaskan sifat komutatif penjumlahan dan perkalian bilangan bulat,
3. menjelaskan unsur identitas penjumlahan dan perkalian bilangan bulat, dan
4. menjelaskan invers penjumlahan dan perkalian bilangan bulat.

Langkah Kegiatan

1. Setiap kelompok akan mendapat tugas diskusi yang berbeda.
2. Pembagian tugas untuk masing-masing kelompok adalah sebagai berikut.
   Kelompok I mendiskusikan pertanyaan diskusi nomor 1.
   Kelompok II mendiskusikan pertanyaan diskusi nomor 2.
   Kelompok III mendiskusikan pertanyaan diskusi nomor 3.
   Kelompok IV mendiskusikan pertanyaan diskusi nomor 4.
   Kelompok V mendiskusikan pertanyaan diskusi nomor 5.

Pertanyaan Diskusi

Selidikilah apakah sifat-sifat operasi berikut berlaku pada bilangan bulat?

1. Sifat tertutup penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bilangan bulat.
2. Sifat komutatif penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan bulat.
3. Unsur identitas penjumlahan dan unsur identitas perkalian bilangan bulat.
4. Invers penjumlahan dan invers perkalian bilangan bulat.
5. Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan bilangan bulat.

Catatan Diskusi

.....

.....

.....

.....

Uraian Materi 2.2

BILANGAN BULAT DAN OPERASINYA

Pembahasan tentang bilangan bulat tentunya akan saling terkait dengan bilangan asli dan bilangan cacah karena himpunan bilangan bulat merupakan gabungan himpunan bilangan asli dan himpunan bilangan cacah. Proses terbentuknya bilangan-bilangan ini merupakan proses sosial dan budaya yang berlangsung pada saat itu. Bilangan merupakan salah satu aspek pembahasan matematika di tingkat sekolah dasar (MI). Salah satu bilangan yang diperkenalkan kepada siswa-siswi MI adalah bilangan bulat. Dengan demikian, materi bilangan bulat ini sangat penting dikuasai oleh para pengajar matematika di tingkat MI.

Dari uraian tentang berbagai sistem bilangan, kita tahu bahwa manusia sesuai dengan zaman, wilayah, dan peradabannya, telah berusaha mengembangkan konsep bilangan dan lambangnya, terutama untuk memenuhi keperluan kegiatan berkomunikasi dan bermasyarakat. Pada awalnya, mereka memerlukan bilangan untuk menghitung *(counting)*, yang mereka kembangkan melalui proses korespondensi 1-1, sehingga terjadi bilangan asli (*natural number*) atau bilangan hitung *(counting number)*. Proses memformalkan ide abstrak dalam menghitung, digunakan perkawanan 1-1, berarti bilangan asli digunakan sebagai bilangan kardinal *(cardinal number)*. Apabila bilangan asli digunakan menurut cara yang lain, yaitu utuk menyebutkan urutan letak atau posisi benda atau objek, sehingga ada urutan kesatu, urutan kedua, urutan ketiga, maka bilangan asli digunakan sebagai bilangan ordinal.

Pada bagian ini akan dibahas sifat operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada bilangan bulat. Pembuktian sifat-sifat operasi tidak secara deduktif namun cukup dengan pembuktian yang bersifat intuitif dan induktif. Hal ini dilakukan agar pembahasan tidak terlalu “berat” bagi para mahasiswa-mahasiswi. Disamping itu, pembuktian yang bersifat deduktif di tingkat madrasah ibtidaiyah (MI) belum dipandang perlu untuk dilatihkan kepada peserta didik.

Pembahasan tentang bilangan bulat akan dimulai dari ruang lingkup bilangan bulat itu sendiri, penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, perkalian dan pembagian bilangan bulat, dan sifat-sifat operasi bilangan bulat. Mahasiswa-mahasiswi diharapkan tidak hanya memahami materi pada pembahasan ini, tetapi diharapkan tahu bagaimana cara menjelaskan materi ini kepada peserta didik nanti. Ilustrasi dengan menggunakan pendekatan yang lebih konkrit diharapkan dapat digunakan dalam mengajarkan materi bilangan bulat.

A. Bilangan Bulat

Bilangan bulat merupakan perluasan dari bilangan cacah. Himpunan bilangan bulat digunakan untuk menjawab permasalahan yang tidak terjawab pada semesta bilangan cacah. Misal, tidak ada jawaban untuk permasalahan “3 - 5” pada semesta bilangan cacah. Dengan kata lain, terdapat beberapa kekurangan, apabila semesta pembicaraan tetap dipertahankan pada himpunan bilangan cacah. Oleh karena itu, perlu adanya perluasan bilangan cacah yang selanjutnya menjadi himpunan bilangan bulat.

Himpunan bilangan bulat terdiri atas himpunan bilangan asli, yaitu {1, 2, 3, 4, ...} yang selanjutnya disebut himpunan bilangan bulat positif, bilangan nol dan himpunan lawan dari bilangan asli, yaitu {-1, -2, -3, ... } yang selanjutnya disebut himpunan bilangan bulat negatif. Jadi, himpunan bilangan bulat adalah {... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }. Sedangkan gabungan bilangan nol dan bilangan asli disebut dengan bilangan cacah. Hubungan bilangan nol, bilangan asli, bilangan cacah dapat visualisasikan pada gambar berikut.

Ilustrasi

Jika dilihat dari gambar di atas, dapat diartikan bahwa untuk bilangan bulat positif (bilangan asli) digambarkan sebagai jarak berarah ke kanan pada garis bilangan yang dimulai dari “0” (nol). Untuk bilangan bulat negatif digambarkan sebagai jarak berarah ke kiri pada garis bilangan yang dimulai dari 0. Bilangan 0 adalah bilangan yang tidak negatif dan tidak positif, disebut juga bilangan netral.

B. Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat

Selanjutnya akan dijabarkan bagaimana menjumlahkan dan mengurangkan dua bilangan bulat. Penjumlahan dan pengurangan dua bilangan bulat mencakup delapan operasi berikut.

1. Penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif.
2. Penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif.
3. Penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif.
4. Penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif.
5. Pengurangan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif.
6. Pengurangan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif.
7. Pengurangan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif.
8. Pengurangan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif.

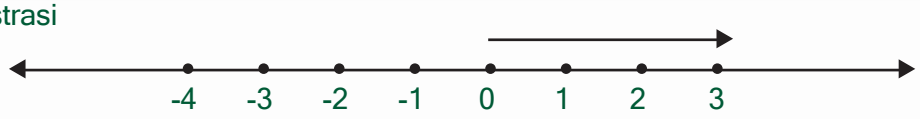
Untuk pengurangan bilangan bulat tidak secara eksplisit diuraian pada pembahasan ini, karena pengurangan pada dasarnya adalah penjumlahan dengan lawannya.

C. Operasi Hitung Penjumlahan Bilangan Bulat pada Garis Bilangan

Ada beberapa prinsip yang harus diperhatikan dalam penggunaan garis bilangan untuk peragaan operasi hitung pada bilangan bulat.

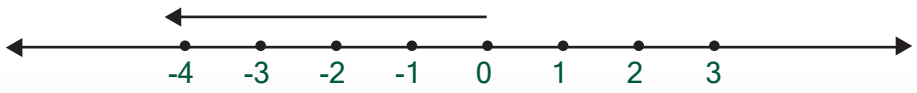
1. Setiap akan dilakukan peragaan, posisi awal peragaan harus dimulai dari bilangan 0 (skala nol).
2. Untuk bilangan bulat positif ditunjukkan dengan ujung anak panah yang mengarah ke bilangan positif (kanan) dan untuk belangan negatif ditunjukkan dengan ujung anak panah yang mengarah ke bilangan negatif (kiri) pada garis bilangan yang digunakan. Misalnya untuk menunjukkan bilangan 3, caranya adalah pangkal anak panah terletak di skala nol, kemudian ujung anak panah bergerak maju ke arah kanan sampai berhenti di skala 3.

Ilustrasi



Sedangkan untuk menunjukkan bilangan -4, caranya adalah pangkal anak panah terletak di skala nol, kemudian ujung anak panah bergerak maju ke arah kiri sampai berhenti di skala -4.

Ilustrasi

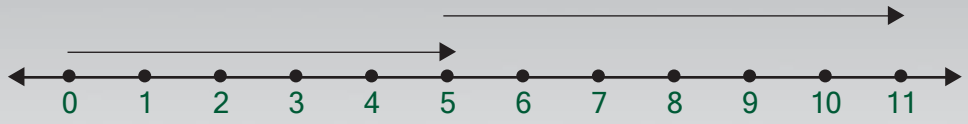


3. Untuk operasi hitung penjumlahan bilangan bulat, ujung anak panah bilangan yang ditambahkan diteruskan maju sejauh bilangan yang penambahnya. Perlu diperhatikan, apabila penambahnya bilangan bulat positif, maka gerakan maju anak panah harus ke arah bilangan positif (kanan). Sebaliknya apabila penambahnya bilangan bulat negatif, maka gerakan maju anak panah harus ke arah nilangan bulat negatif (kiri). Hasil akhir dari penjumlahan kedua bilangan bulat tersebut dilihat dari posisi akhir ujung anak panah.
4. Operasi hitung pengurangan bilangan bulat, ujung anak panah bilangan yang dikurang diteruskan mundur sejauh bilangan pengurangnya. Apabila pengurangnya bilangan bulat positif, maka gerakan mundur anak panah harus ke arah bilangan positif. Apabila pengurangnya bilangan bulat negatif, maka gerakan mundur anak panah harus ke arah bilangan negatif. Hasil akhir dari pengurangan kedua bilangan bulat tersebut dilihat dari posisi akhir ujung anak panah.

Contoh

Nyatakan 5 + 6 pada garis bilangan dan tentukan hasilnya!

Jawaban

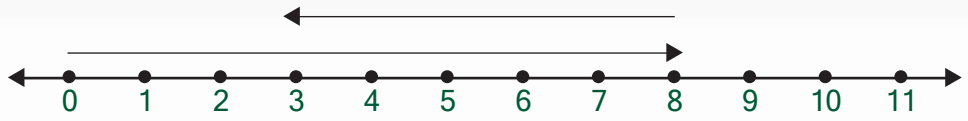


Jadi 5 + 6 = 11

Contoh

Nyatakan 8 + (-5) pada garis bilangan dan tentukan hasilnya!

Jawaban

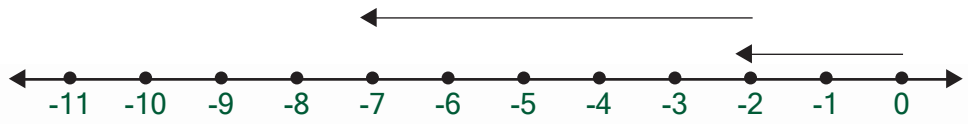


Jadi 8 + (-5) = 3

Contoh

Nyatakan (-2) + (-5) pada garis bilangan dan tentukan hasilnya!

Jawaban



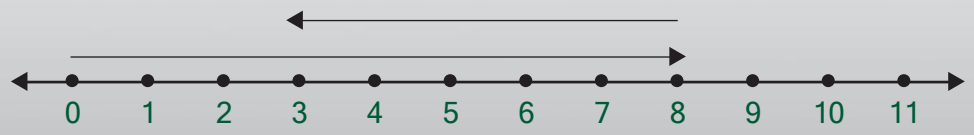
Jadi -2 + (-5) = -7

Untuk operasi pengurangan bilangan bulat pada prinsipnya sama dengan penjumlahan bilangan bulat.

Contoh

Nyatakan 8 - 5 pada garis bilangan dan tentukan hasilnya!

Jawaban

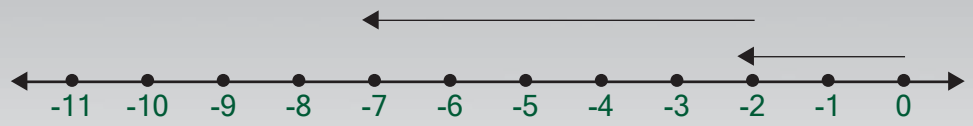


Jadi 8 - 5 = 3

Contoh

Nyatakan (-2) - 5 pada garis bilangan dan tentukan hasilnya

Jawaban



Jadi (-2) - 5 = -7

D. Sifat Operasi Hitung Penjumlahan Bilangan Bulat

Di sini akan dibahas sifat-sifat operasi hitung penjumlahan bilangan bulat, yaitu sifat tertutup, sifat pertukaran (komutatif), sifat pengelompokkan (asosiatif), sifat identitas dan sifat invers.

Sifat Tertutup

Perhatikan himpunan bilangan bulat Z = { ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }, kemudian ambilah sebarang dua bilangan bulat, jumlahkan dan periksalah hasilnya. Apakah hasil penjumlahan dua bilangan bulat tersebut merupakan bilangan bulat juga? Untuk memeriksa hasil penjumlahan dua bilangan bulat tersebut, ambilah beberapa pasang bilangan bulat. Misalnya kita ambil bilangan 5 dan -3, maka hasil penjumlahannya adalah 5 + (-3) = 2 merupakan bilangan bulat. Demikian juga untuk pasangan bilangan -8 dan -7, hasil penjumlahan -8 dan -7 adalah -8 + (-7) = -15 juga merupakan bilangan bulat. Dapat disimpulkan bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula, dengan kata lain bahwa penjumlahan bilangan bulat bersifat tertutup.

Sifat Pertukaran (Komutatif)

Apabila kita ambil dua bilangan bulat, kemudian kita jumlahkan, apakah hasil penjumlahan bilangan pertama ditambah bilangan kedua sama dengan hasil penjumlahan bilangan kedua ditambah bilangan pertama? Untuk memeriksa, kita ambil dua bilangan bulat, misalnya 8 + (-5) apakah sama dengan -5 + 8? Hasil 8 + (-5) = 3 dan -5 + 8 = 3. Dengan demikian 8 + (-5) = -5 + 8 artinya penjumlahan dua bilangan bulat dapat dipertukarkan, atau dapat dikatakan bahwa penjumlahan dua bilangan bulat bersifat komutatif. Kebenaran prinsip itu dapat diperiksa untuk beberapa pasangan bilangan bulat yang lainnya.

Untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b berlaku

$$a + b = b + a$$

Sifat Pengelompokan (Asosiatif)

Untuk memahami sifat pengelompokan operasi hitung penjumlahan bilangan bulat, cermatilah contoh berikut (3 + (-5)) + 8 dan 3 + ((-5) + 8), apakah memperoleh hasil yang sama? Hasil penjumlahan (3 + (-5)) + 8 = -2 + 8 = 6 dan 3 + ((-5) + 8) = 3 + 3 = 6 ternyata hasilnya sama. Demikian juga dapat diperiksa penjumlahan ((-3) + (-4)) + (-5) dan (-3) + ((-4) + (-5)), hasil penjumlahan ((-3) + (-4)) + (-5) = (-7) + (-5) = -12 dan (-3) + ((-4) + (-5)) = (-3) + (-9) = -12 ternyata hasilnya sama.

Penjumlahan tiga buah bilangan bulat dengan bilangan bulat pertama dikelompokan dengan bilangan kedua terlebih dahulu, kemudian ditambahkan dengan bilangan ketiga hasilnya sama dengan penjumlahan bilangan kedua dikelompokan dengan bilangan ketiga terlebih dahulu kemudian hasilnya ditambahkan dengan bilangan pertama. Dalam hal ini, maka penjumlahan bilangan bulat berlaku sifat pengelompokan (asosiatif).

Untuk sebarang tiga bilangan bulat a, b dan c berlaku

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Sifat Bilangan Nol (Unsur Identitas)

Nol yang dinotasikan dengan “0” adalah salah satu anggota dari himpunan bilangan bulat. Penjumlahan bilangan nol dengan sebarang bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat itu sendiri.

Contoh

1. 4 + 0 = 4
2. 0 + 4 = 4
3. (-5) + 0 = -5
4. 0 + (-5) = -5
5. 0 + 0 = 0

Secara umum dapat disimpulkan bahwa,

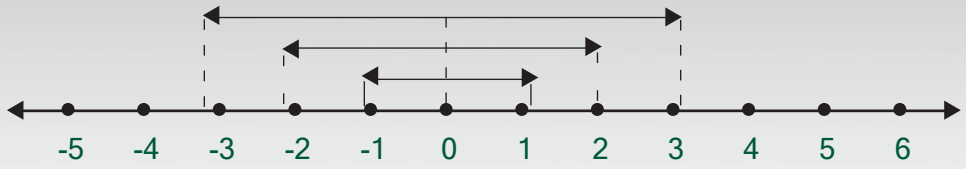
Untuk sebarang bilangan bulat a berlaku

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Sifat Invers Penjumlahan (Lawan Suatu Bilangan Bulat)

Salah satu cara memahami adanya lawan suatu bilangan bulat adalah dengan memperhatikan garis bilangan seperti berikut.

Ilustrasi



Pada garis bilangan di atas tampaklah bahwa titik yang bertanda negatif dan positif masing-masing mempunyai jarak yang sama terhadap titik 0. Contohnya titik 1 dan -1 berjarak sama terhadap titik 0. Demikian juga titik-titik 2, 3, 4, ... dan titik-titik -2, -3, -4, ... masing-masing berjarak sama terhadap titik 0. Apabila diperhatikan lebih lanjut bahwa letak titik yang bertanda 1, 2, 3, 4, ... berseberangan dengan titik-titik yang bertanda -1, -2, -3, -4, ... Hal ini dapat diartikan bahwa titik bertanda 1 berlawanan letaknya terhadap titik betanda 0 dengan titik bertanda -1. Demikian juga titik-titik 2, 3, 4, ... berlawanan letaknya terhadap titik bertanda 0 dengan titik-titik bertanda -2, -3, -4, ...

Selanjutnya dilihat hasil penjumlahan dua bilangan yang saling berlawanan, misalnya kita ambil beberapa contoh berikut.

1. (-1) + 1 = 0
2. 1 + (-1) = 0
3. 2 + (-2) = 0
4. (-2) + 2 = 0

Berdasarkan contoh-contoh di atas tampaklah bahwa penjumlahan dua bilangan yang saling berlawanan hasilnya 0. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa lawan dari sebarang bilangan adalah negatif dari bilangan bulat itu sendiri; dan penjumlahan dua bilangan buah bilangan bulat yang saling berlawanan hasilnya 0.

Untuk sebarang bilangan bulat a memiliki invers jumlah -a
(dapat juga dikatakan bahwa invers jumlah dari -a adalah a)
dan berlaku a + (-a) = (-a) + a = 0

E. Operasi Hitung Pengurangan Bilangan Bulat pada Garis Bilangan

Pada bagian ini diuraikan bagaimana pengurangan dua bilangan bulat sebagai penjumlahan dengan lawannya, dan pengurangan bilangan bulat dengan menggunakan garis bilangan. Pengurangan a - b didefinisikan sebagai penjumlahan a dengan lawannya b. Contoh-contoh berikut akan menjelaskan bagaimana pengurangan dua bilangan bulat.

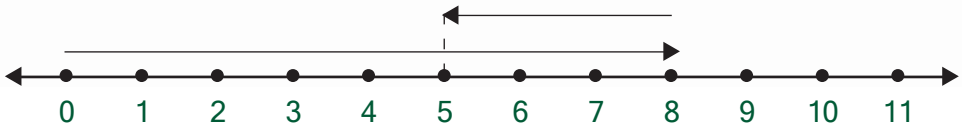
Contoh

Nyatakan 8 - 3 pada garis bilangan dan tentukan hasilnya!

Jawaban

8 - 3 = 8 + (-3) = 5

Ilustrasi



Jadi 8 - 3 = 5

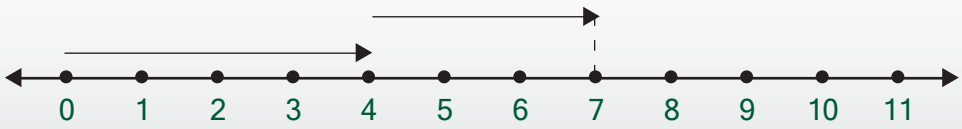
Contoh

Nyatakan 4 - (-3) pada garis bilangan dan tentukan hasilnya!

Jawaban

4 - (-3) = 4 + 3 = 7

Ilustrasi



Jadi 4 - (-3) = 7

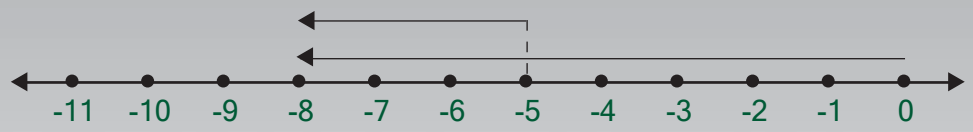
Contoh

Nyatakan (-8) - (-3) pada garis bilangan dan tentukan hasilnya!

Jawaban

(-8) + 3 = -5

Ilustrasi



Jadi (-8) - (-3) = -5

F. Sifat Operasi Hitung Pengurangan Bilangan Bulat

Pada bagian akan dibahas sifat-sifat operasi hitung pengurangan bilangan bulat, yaitu sifat tertutup, sifat pertukaran (komutatif), sifat pengelompokkan (asosiatif), sifat identitas, dan sifat invers.

Sifat Tertutup

Perhatikan himpunan bilangan bulat Z = { ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }, kemudian ambilah sebarang dua bilangan bulat, kurangkanlah dan periksalah hasilnya! Apakah hasil pengurangan dua bilangan bulat tersebut merupakan bilangan bulat juga? Untuk memeriksa hasil pengurangan dua bilangan bulat tersebut, ambilah beberapa pasang bilangan bulat. Misalnya, kita ambil bilangan 5 dan -3, maka hasil pengurangannya adalah 5 - (-3) = 8 merupakan bilangan bulat. Demikian juga untuk pasangan bilangan -8 dan -7, hasil pengurangan -8 dan -7 adalah (-8) - (-7) = -1 juga merupakan bilangan bulat. Dapat disimpulkan bahwa hasil pengurangan dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula, dengan kata lain bahwa pengurangan bilangan bulat bersifat tertutup.

Sifat Pertukaran (Komutatif)

Apabila kita ambil dua bilangan bulat, kemudian kita kurangkan, apakah hasil pengurangan bilangan pertama dikurangkan bilangan kedua sama dengan hasil pengurangan bilangan kedua dikurangkan bilangan pertama? Untuk memeriksa kita ambil dua bilangan bulat, misalnya 8 - (-5) apakah sama dengan (-5) - 8? Hasil 8 - (-5) =13 dan (-5) - 8 = -13. Dengan demikian, 8 - (-5) $\neq$ (-5) - 8 artinya pengurangan dua bilangan bulat tidak dapat dipertukarkan, atau dapat dikatakan bahwa pengurangan dua bilangan bulat tidak bersifat komutatif. Dapat diperiksa untuk beberapa pasangan bilangan bulat yang lainnya.

G. Perkalian dan Pembagian Bilangan Bulat

Selanjutnya diuraikan bagaimana mengalikan dan membagi dua bilangan bulat. Perkalian dan pembagian bilangan bulat mencakup delapan operasi, yakni:

1. perkalian bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif,
2. perkalian bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif,
3. perkalian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif,
4. perkalian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif,

5. pembagian bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif,
6. pembagian bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif,
7. pembagian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif, dan
8. pembagian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif.

H. Operasi Hitung Perkalian Bilangan Bulat pada Garis Bilangan

Perkalian adalah penjumlahan berulang. Misalnya, 4 x 3 artinya 3 + 3 + 3 + 3, dan 5 x 2 artinya 2 + 2 + 2 + 2 + 2. Ada beberapa prinsip yang harus diperhatikan dalam penggunaan garis bilangan untuk menjelaskan peragaan operasi hitung perkalian pada bilangan bulat.

1. Setiap akan dilakukan peragaan, posisi awal peragaan harus dimulai dari bilangan 0 (skala nol).
2. Apabila pengalinya adalah bilangan Bulat positif, maka ujung anak panah menghadap ke bilangan positif (kanan), dan apabila pengalinya adalah bilangan bulat negatif, maka ujung anak panah menghadap ke bilangan negatif (kiri).
3. Gerakan maju anak panah menunjukkan bilangan yang akan dikalikan adalah bilangan positif, sedangkan gerakan mundur anak panah menunjukkan bilangan pengalinya adalah bilangan negatif.
4. Hasil perkalian ditunjukkan dengan skala yang ditunjukkan anak panah pada langkah yang terakhir.

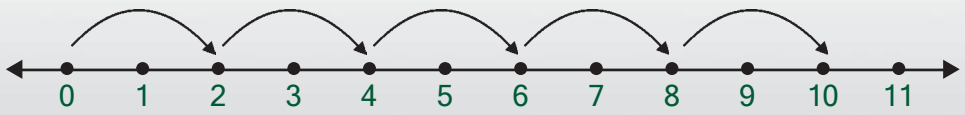
Contoh

Nyatakan 5 x 2 sebagai penjumlahan berulang dan nyatakan pada garis bilangan serta tentukan hasilnya!

Jawaban

5 x 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10

Ilustrasi



Jadi 5 x 2 = 10

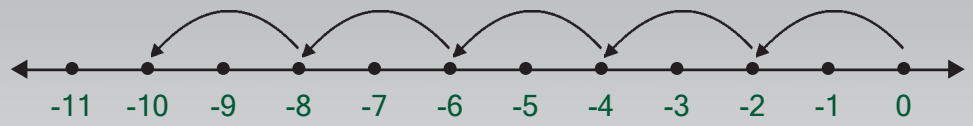
Contoh

Nyatakan 5 x (-2) sebagai penjumlahan berulang dan nyatakan pada garis bilangan serta tentukan hasilnya!

Jawaban

5 x (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -10

Ilustrasi



Jadi 5 x (-2) = -10 atau 5 x (-2) = -(5 x 2)

Selanjutnya dijelaskan perkalian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif. Misalnya, bagaimana cara menjelaskan hasil perkalian (-3) x 5? Untuk memahami hasil operasi hitung perkalian tersebut dapat dijelaskan dengan menggunakan skema berikut.

	3 x 5 = 15	
Berkurang 1	2 x 5 = 10	Berkurang 5
Berkurang 1	1 x 5 = 5	Berkurang 5
Berkurang 1	0 x 5 = 0	Berkurang 5
Berkurang 1	-1 x 5 = -5	Berkurang 5
Berkurang 1	-2 x 5 = -10	Berkurang 5
Berkurang 1	-3 x 5 = -15	Berkurang 5
.....	.....	.....

Berdasarkan pada skema di atas, hasil perkalian (-3) x 5 adalah -15 atau (-3) x 5 = -(3 x 5) = -15.

Perhatikan pula penjelasan tentang perkalian bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif. Misalnya, bagaimana cara menjelaskan hasil perkalian (-3) x (-5)? Untuk memahami hasil operasi hitung perkalian tersebut dapat dijelaskan dengan menggunakan skema berikut.

	3 x (-5) = -15	
Berkurang 1	2 x (-5) = -10	Bertambah 5
Berkurang 1	1 x (-5) = -5	Bertambah 5
Berkurang 1	0 x (-5) = 0	Bertambah 5
Berkurang 1	(-1) x (-5) = 5	Bertambah 5
Berkurang 1	(-2) x (-5) = 10	Bertambah 5
Berkurang 1	(-3) x (-5) = 15	Bertambah 5
.....	.....	.....

Berdasarkan pada skema di atas, hasil perkalian (-3) x (-5) adalah 15.

I. Sifat Operasi Hitung Perkalian Bilangan Bulat

Pada bagian ini dibahas sifat-sifat operasi hitung perkalian bilangan bulat, yaitu sifat tertutup, sifat pertukaran (komutatif), sifat pengelompokkan (asosiatif), sifat identitas, dan sifat invers.

Sifat Tertutup

Perhatikan himpunan bilangan bulat Z = { ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }, kemudian ambilah sebarang dua bilangan bulat, kalikanlah dan periksalah hasilnya! Apakah hasil perkalian dua bilangan bulat tersebut merupakan bilangan bulat juga? Untuk memeriksa hasil perkalian dua bilangan bulat tersebut, ambilah beberapa pasang bilangan bulat. Misalnya kita ambil bilangan 5 dan -3, maka hasil perkaliannya adalah 5 x (-3) = -15 merupakan bilangan bulat. Demikian juga untuk pasangan bilangan -3 dan -7, hasil perkalian -8 dan -7 adalah -3 x (-7) = 21 juga merupakan bilangan bulat. Dapat disimpulkan bahwa hasil perkalian dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula. Dengan kata lain, perkalian bilangan bulat bersifat tertutup.

Sifat Pertukaran (Komutatif)

Apabila kita ambil dua bilangan bulat, kemudian kita kalikan, apakah hasil perkalian bilangan pertama dikalikan bilangan kedua sama dengan hasil perkalian bilangan kedua dikalikan bilangan pertama? Untuk mengujinya, kita ambil dua bilangan bulat, misalnya 8 x (-5) apakah sama dengan (-5) x 8? Hasil 8 x (-5) adalah -40 dan (-5) x 8 adalah -40. Dengan demikian, 8 x (-5) = (-5) + 8. Artinya perkalian dua bilangan bulat dapat dipertukarkan atau dapat dikatakan bahwa perkalian dua bilangan bulat bersifat komutatif. Kebenaran prinsip itu dapat diperiksa untuk beberapa pasangan bilangan bulat yang lainnya.

Untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b berlaku

$$a + b = b + a$$

Sifat Pengelompokan (Asosiatif)

Untuk memahami sifat pengelompokan operasi hitung perkalian bilangan bulat, cermatilah contoh berikut, (3 x (-5)) x 8 dan 3 x ((-5) x 8). Apakah diperoleh hasil yang sama? Hasil perkalian (3 x (-5)) x 8 = (-15) x 8 = -120 dan 3 x ((-5) x 8) = 3 x (-40) = -120 ternyata hasilnya memang sama. Demikian juga pada perkalian ((-3) x (-4)) x (-5) dan (-3) x ((-4) x (-5)), hasil perkalian ((-3) x (-4)) x (-5) = 12 x (-5) = -60 dan (-3) x ((-4) x (-5)) = (-3) x 20 = -60 ternyata hasilnya juga sama.

Untuk perkalian tiga buah bilangan bulat dengan bilangan bulat pertama dikelompokan dengan bilangan kedua terlebih dahulu, kemudian dikalikan

dengan bilangan ketiga hasilnya sama dengan perkalian bilangan kedua dikelompokan dengan bilangan ketiga terlebih dahulu kemudian hasilnya dikalikan dengan bilangan pertama. Dalam hal ini, perkalian bilangan bulat berlaku sifat pengelompokan (asosiatif).

Untuk sebarang tiga bilangan bulat a, b dan c berlaku
$(a + b) + c = a + (b + c)$

Sifat Bilangan Satu (Unsur Identitas)

Bilangan 1adalah salah satu anggota dari himpunan bilangan bulat. Perkalian bilangan 1 dengan sebarang bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat itu sendiri.

Contoh

1. $4 \times 1 = 4$
2. $1 \times 4 = 4$
3. $(-5) \times 1 = -5$
4. $1 \times (-5) = -5$
5. $1 \times 1 = 1$

Secara umum dapat disimpulkan sebagai berikut.

Untuk sebarang bilangan bulat a berlaku
$a \times 1 = 1 \times a = a$
a disebut unsur identitas perkalian.

Sifat Penyebaran (Distributif)

Dalam memahami sifat penyebaran (distributif) perkalian terhadap penjumlahan dapat dilakukan sebagaimana memahami sifat pengelompokan. Misalnya, apakah $3 \times (4 + 5) = (3 \times 4) + (3 \times 5)$? Untuk itu, cermatilah langkah-langkah penyelesaian berikut.

$$\begin{aligned} 3 \times (4 + 5) &= (3 \times 4) + (3 \times 5) \\ 3 \times 9 &= 12 + 15 \\ \Leftrightarrow 27 &= 27 \end{aligned}$$

Ternyata, hasilnya adalah 27. Selanjutnya, dapat diperiksa beberapa pasangan bilangan bulat yang lain. Dengan memeriksa beberapa pasangan bilangan bulat yang lain, secara umum dapat disimpulkan sebagai berikut.

Untuk sebarang tiga bilangan bulat a, b dan c berlaku
$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

J. Operasi Hitung Pembagian Bilangan Bulat

Pembagian pada dasarnya adalah suatu proses pencarian bilangan yang belum diketahui “adanya” dalam sebuah kalimat matematika. Artinya, pembagian dapat dipandang sebagai suatu bentuk perkalian dengan salah satu faktornya belum diketahui. Sebagai contoh, apabila dalam perkalian 3 x 4 = k tentu k = 12, maka dalam pembagian 12 : 3 = n atau n x 3 = 12 tentu n = 4. Demikian juga dengan, 12 : 4 = m atau 12 = m x 3 tentu m = 4.

Latihan

1. Nyatakan penjumlahan bilangan bulat berikut dalam garis bilangan!
   a. 3 + 6
   b. 9 + (-3)
   c. (-11) + 7
   d. (-13) + (-4)
2. Nyatakan pengurangan bilangan bulat berikut dalam garis bilangan!
   a. 3 - 13
   b. 7 - (-4)
   c. (-8) - 5
   d. (-4) - (-6)
3. Bagaimana cara anda menjelaskan dengan pendekatan yang lebih konkrit perkalian bilangan bulat berikut!
   a. 5 x 3
   b. 6 x (-7)
   c. (-4) x 5
   d. (-5) x (-8)
4. Selidikilah apakah operasi hitung berikut pada bilangan bulat positif berlaku sifat tertutup!
   a. Penjumlahan
   b. Pengurangan
   c. Perkalian
   d. Pembagian
5. Selidikilah apakah operasi hitung berikut pada bilangan cacah berlaku sifat komutatif!
   a. Penjumlahan
   b. Pengurangan
   c. Perkalian
   d. Pembagian

6. Selidikilah apakah operasi hitung berikut pada bilangan bulat positif berlaku sifat asosiatif!
   a. Penjumlahan
   b. Pengurangan
   c. Perkalian
   d. Pembagian

Rangkuman

1. Himpunan bilangan bulat terdiri atas himpunan bilangan asli, yaitu {1, 2, 3, 4, ...} yang selanjutnya disebut himpunan bilangan bulat positif, bilangan nol dan himpunan lawan dari bilangan asli, yaitu {-1, -2, -3, ... } yang selanjutnya disebut himpunan bilangan bulat negatif. Jadi himpunan bilangan bulat adalah {... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }.

2. Operasi hitung penjumlahan pada bilangan bulat berlaku sifat tertutup, sifat pertukaran (komutatif), sifat pengelompokkan (asosiatif), memiliki unsur identitas yaitu 0, dan negatif dari sebarang bilangan bulat merupakan ivers bilangan itu.

3. Operasi hitung pengurangan pada bilangan bulat berlaku sifat tertutup, tidak berlaku sifat pertukaran (tidak komutatif), dan tidak berlaku sifat pengelompokkan (tidak asosiatif).

4. Operasi hitung perkalian pada bilangan bulat berlaku sifat tertutup, sifat pertukaran (komutatif), sifat pengelompokkan (asosiatif), memiliki unsur identitas yaitu 1, dan invers sebarang bilangan bulat tidak selalu bilangan bulat lagi.

5. Operasi hitung pembagian pada bilangan bulat berlaku tidak berlaku sifat tertutup, tidak berlaku sifat pertukaran (komutatif), tidak berlaku sifat pengelompokkan (asosiatif).

Lembar Powerpoint 2.3

File lengkap ada di CD bahan kuliah Matematika 2
Nama file: Paket 2 Bilangan Bulat dan Operasinya

BILANGAN BULAT

LANGKAH PERKULIAHAN

- Kegiatan awal: Apersepsi, motivasi dan tujuan perkuliahan
- Memperagakan operasi hitung bilangan bulat
- Diskusi kelompok memaknai perkalian
- Group to group axchange sifat operasi hitung bilangan bulat
- Mengerjakan soal quis
- Kegiatan akhir: refleksi dan tindak lanjut

APERESEPSI

- Apa makna dari minus 100 C (-100)?
- Manakah yang lebih cepat dingin, apabila Ibu menset kulkas pada suhu -20 C atau -100 C?

Tujuan perkuliahan

Kompetensi Dasar

Memahami bilangan Bulat, operasi bilangan Bulat dan sifat-sifat operasi bilangan Bulat beserta aplikasinya untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Indikator Kompetensi

Pada akhir perkuliahan diharapkan mahasiswa dapat:

- Memvisualisasikan penjumlahan bilangan bulat pada garis bilangan.
- Membuktikan sifat tertutup penjumlahan dan perkalian bilangan bulat
- Membuktikan sifat komutatif penjumlahan dan perkalian bilangan bulat
- Menunjukkan unsur identitas penjumlahan dan perkalian bilangan bulat
- Menunjukkan invers penjumlahan dan perkalian bilangan bulat

DISKUSI KELOMPOK

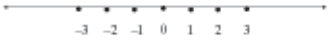
- Mahasiswa-mahasiswi dikelompokkan menjadi 6 kelompok
- Kelompok 1 dan 2 mendiskusikan LK 2.1.A
- Kelompok 3 dan 4 mendiskusikan LK 2.1.B
- Kelompok 5 dan 6 mendiskusikan LK 2.1.C

Presentasi

- Beberapa kelompok diminta untuk mempresentasikan hasil diskusi kelompoknya.
- Peserta lain diminta untuk menanggapi, bertanya atau menyanngah

Bilangan Bulat

- Himpunan bilangan bulat terdiri dari himpunan bilangan asli, yaitu {1, 2, 3, 4, ... } yang selanjutnya disebut himpunan bilangan bulat positif, bilangan nol dan himpunan lawan dari bilangan asli, yaitu {-1, -2, -3, ... } yang selanjutnya disebut himpunan bilangan bulat negatif. Jadi himpunan bilangan bulat adalah {... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }.

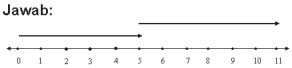


Penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif

Contoh:

Nyatakan 5 + 6 pada garis bilangan dan tentukan hasilnya

Jawab:



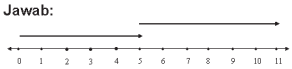
Jadi 5 + 6 = 11

Penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif

Contoh:

Nyatakan 5 + 6 pada garis bilangan dan tentukan hasilnya

Jawab:



Jadi 5 + 6 = 11

Sifat Komutatif

- Penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat berlaku sifat komutatif.

  Untuk sebarang bilangan bulat a dan b berlaku
  - $a + b = a + b$
  - $a \times b = b \times a$
- Pengurangan dan pembagian pada bilangan bulat tidak berlaku sifat komutatif

  Untuk sebarang bilangan bulat a dan b
  - $a - b \neq a - b$
  - $a : b \neq b : a$

Sifat Asosiatif

- Penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat berlaku sifat asosiatif.

Untuk sebarang tiga bilangan bulat a, b dan c berlaku
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Lembar Penilaian 2.4

Penilaian

Penilaian dilakukan dengan cara tes tulis tentang penjumlahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, dan sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat.

Instrumen Penilaian

1. Nyatakan penjumlahan bilangan bulat berikut dalam garis bilangan!
   a. 5 + 9
   b. 12 + (-7)
   c. (-10) + 8
   d. (-12) + (-7)
2. Nyatakan pengurangan bilangan bulat berikut dalam garis bilangan!
   a. 4 - 11
   b. 6 - (-5)
   c. (-7) - 6
   d. (-2) - (-5)
3. Bagaimana cara anda menjelaskan dengan pendekatan yang lebih konkrit perkalian bilangan bulat berikut!
   a. 6 x 3
   b. 5 x (-4)
   c. (-3) x 7
   d. (-4) x (-2)
4. Selidikilah apakah operasi hitung bilangan bulat berikut berlaku sifat tertutup!
   a. Penjumlahan
   b. Pengurangan
   c. Perkalian
   d. Pembagian
5. Selidikilah apakah operasi hitung bilangan bulat berikut berlaku sifat komutatif!
   a. Penjumlahan
   b. Pengurangan
   c. Perkalian
   d. Pembagian
6. Selidikilah apakah operasi hitung bilangan bulat berikut berlaku sifat asosiatif!
   a. Penjumlahan
   b. Pengurangan
   c. Perkalian
   d. Pembagian

Kunci

4. a. Ya
   b. Ya
   c. Ya
   d. Tidak
5. a. Ya
   b. Tidak
   c. Ya
   d. Tidak
6. a. Ya
   b. Tidak
   c. Ya
   d. Tidak

Daftar Pustaka

Naga, Dali S. 1985. *Sejarah Matematika.* Jakarta: Gramedia

Kahfi, S. 2004. *Matematika untuk SMP/MTs Kelas VII*. Malang: UM-Press

Kennedy, L.M., & Tipps, S. 1994 *Guiding Children's Learning of Mathematics.* 7th Ed. Belmont, California: Wadsworth Publishing Company

Muhsetyo, Gatot, 2003. *Modul Inhouse Training Guru Matematika Madrasah Tsanawiyah.* Diterbitkan oleh Lembaga Pengkajian Agama dan Masyarakat (LPAM)

Setyawan, AH, dkk. 2007. *Matematika untuk SMP dan MTs Kelas VII*. Jakarta: Grasindo